23' AL API (PAPERS GROUP)

B කොටස

- ප්‍රශ්න 05 කට පිළිතුරු සපයන්න.

(11) (a) $a, b \in \mathbb{R}$ වූ $(x-a)^2 + (x-b)^2 = 2$ සමීකරණයේ මූල α සහ β යැයි ගනිමු.

$|a-b| \leq 2$ නම් α සහ β තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.

(i) $(a\alpha + b\beta) + (b\alpha + a\beta) = (a+b)^2$ බව

(ii) $2(a\alpha + b\beta)(b\alpha + a\beta) = (a^2+b^2)^2 + 4a^2b^2 - 2(a-b)^2$ බව පෙන්වන්න.

$a = 1$ සහ $b = 2$ විට $(a\alpha + b\beta)$ සහ $(b\alpha + a\beta)$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $(x-p)^2 + (x-q)^2 = 2$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.
මෙහි p සහ q නිර්ණය කල යුතු අගයන් වේ. $(p, q \in \mathbb{Z}^+)$

(b) $f(x) = 3x^3 + cx^2 + x - 2$ යැයි ගනිමු. මෙහි $c \in \mathbb{R}$ වේ.
$(x-2)$ යන්න $f(x)$ බහුපදයේ සාධකයක් වන පරිදි c නියතයෙහි අගය සොයන්න.

c එම අගය ගන්නා විට

(i) $f(x) = 0$ සමීකරණයට එක් තාත්ත්වික මූලයක් පමණක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ වූ $f(x) + \lambda(x-2)(3x-1) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල තුනක් පැවතීම සඳහා λ හි අගය පරාසය නිර්ණය කරන්න.

(12) (a) තනිරූල් පොත් 8 ක් ද කොටුරූල් පොත් 4 ක් ද අවම වශයෙන් එක් අයෙකුට එක් පොතක්වත් ලැබෙන පරිදි සිසුන් 10 දෙනෙකු අතරේ බෙදා දිය යුතුව ඇත.

(i) සිසුන් 8 දෙනෙකුට එක් පොත බැගින් හා ඉතිරි දෙදෙනාගෙන් එක් අයෙකුට තනිරූල් පොත් දෙකක් ද අනෙකාට කොටුරූල් පොත් දෙකක් ද ,

(ii) සිසුන් 9 දෙනෙකුට එක් පොත බැගින් ද අනෙක් සිසුවාට තනිරූල් පොත් 3 ක් ද ,

(iii) සිසුන් 9 දෙනෙකුට එක් පොත බැගින් ද ඉතිරි සිසුවාට පොත් 3 ක් ද ,

ලැබෙන පරිදි වූ වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \frac{2r+3}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$ ද $f(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r+1}$ ද යැයි ගනිමු.

මෙහි A හා B යනු තාත්ත්වික නියත වේ. $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = f(r) - f(r+2)$ වන පරිදි A හා B හි අගයන් නිර්ණය කරන්න.

ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{3} - \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින් $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_{r+2}$ හි අගය අපෝහනය කරන්න.

(13) (a) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$ සහ $C = \begin{pmatrix} b & b-2 \\ b-2 & b-3 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$AB^T = C$ නම් $a = 3$ හා $b = 5$ බව පෙන්වන්න.

C^{-1} ලියා දක්වා $C + C^{-1} = 7I$ බව පෙන්වන්න. I යනු ගණය දෙකක් වන ඒකක න්‍යාසයකි.

$P = \frac{1}{3}(C - 2I)$ වේ. $C(Q + P) = C + C^{-1}$ වන පරිදි Q න්‍යාසය සොයන්න.

(b) Z යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවකි. $\bar{Z}$ හා $|Z|$ අර්ථ දක්වන්න.

$Z\bar{Z} = |Z|^2$ හා $Z - \bar{Z} = = 2Im(Z)$ බව පෙන්වන්න.

$Z_1 Z_2 \in \mathbb{C}$ සඳහා $\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \overline{Z_2}$ බව පෙන්වා ඒනයින්

$(Z_1 + Z_2)(\overline{Z_1} + \bar{Z}_2) = |Z_1 + Z_2|^2$ බව අපෝහනය කරන්න.

23' AL API (PAPERS GR

තවදුරටත්

$|Z + 3i|^2 = |Z|^2 + 6Im(Z) + 9$ හා $Im\left(\frac{1}{Z-3i}\right) = \frac{3+Im(Z)}{|Z-3i|^2}$ බව පෙන්වන්න.

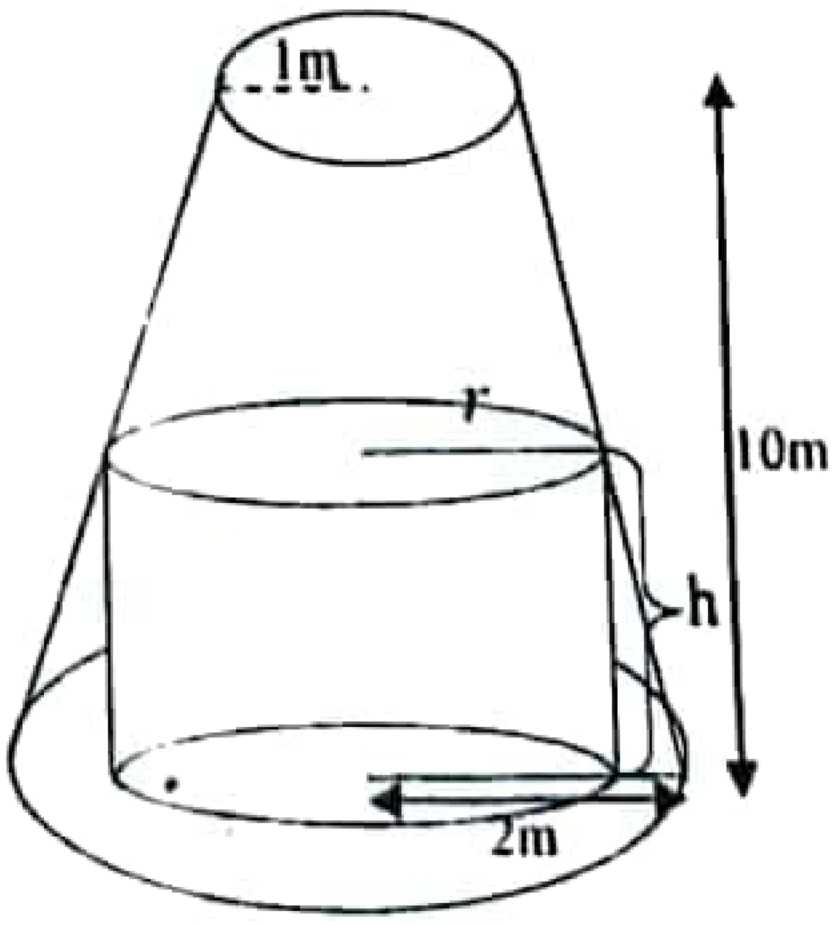
(c) $z = 1 + i$ යන්න $r(cos\theta + isin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.
මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වේ.
ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් $z^6 = 2ni$ නම් n හි අගය සොයන්න.

(14) (a) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය $f'(x)$ යන්න $x \neq 1$ සඳහා $f'(x) = \frac{-2(2x-1)}{(x-1)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒනයින් $f(x)$ වැඩිවන හා අඩුවන ප්‍රාන්තර සොයන්න. $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x \neq 1$ සඳහා $f''(x) = \frac{2(4x-1)}{(x-1)^4}$ බව දී ඇත. $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. ස්පර්ශෝන්මුඛ හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.



(b) රූපයේ දැක්වෙන්නේ ඝන කේතුවකින් සාදා ඇති උස 10m ක් සහ වෘත්තාකාර අරයන් 2m ක් හා 1m ක් වූ ඡින්නකයකි. ඡින්නකයේ හැඩයෙන් යුක්ත ඝන වස්තුවෙන් ඝන සිලින්ඩරයක් කපා ගත යුතුය. කපාගත් සිලින්ඩරයේ අක්ෂයත් ඡින්නකයේ අක්ෂයත් සමපාත වන අතර සිලින්ඩරයේ උස h ද අරය r ද වේ.

$h = 10(2 - r)$ බව පෙන්වන්න. සිලින්ඩරයේ පරිමාව V නම් $V = 10\pi r^2(2-r)$ බව පෙන්වන්න. කපා ගන්නා ලද සිලින්ඩරයේ පරිමාව V උපරිම වන විට අරය සොයන්න.

(15) (a) $x^3 + 3x^2 + 8x + 26 = A(x+1)(x^2+9) + B(x^2+9) + (Cx+D)(x+1)$ වන පරිදි A, B, C, D නියත සොයන්න.

ඒ නයින් $\int_0^3 \frac{x^3+3x^2+8x+26}{(x+1)(x^2+9)}\,dx = 3 + 4\ln 2 - \frac{\pi}{12}$ බව පෙන්වන්න.

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \int_0^2 (ax^2 + 2x)dx$ නම් a හි අගය සොයන්න.

(c) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින් $\int_0^{\pi} x\sin^5 x\,dx$ අනුකලය අගයන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP

(16) $l_1 = 7x - 4y - 18 = 0$ හා $l_2 = 8x + y - 15 = 0$ සරල රේඛා දෙකේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන A හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

l_1 හා l_2 රේඛා අතර මහා කෝණයේ කෝණ සමච්ඡේදකය l හි සමීකරණය සොයන්න.

l මත වූ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් $(2+5t, -1-t)$ ආකාරයෙන් පරාමිතිකව ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

l_1 හා l_2 රේඛා දෙකම ස්පර්ශ කරන්නාවූද, කේන්ද්‍රය l මත වූද අරය $\frac{3\sqrt{65}}{5}$ වූද වෘත්තවල සමීකරණ සොයන්න.

එම වෘත්ත අතරින් කේන්ද්‍රය x-අක්ෂය මත නොපිහිටන වෘත්තය S_1 නම්, S_1 හි කේන්ද්‍රය හා A ලක්ෂ්‍යය විශ්කම්භයක අන්ත වූ S_2 වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

S_1 හා S_2 වෘත්ත වල පොදු ජ්‍යායේ සමීකරණය සොයන්න.

S_1 වෘත්තය හා S_2 වෘත්තය ප්‍රලම්භව ඡේදනය වන්නේදැයි නිර්ණය කරන්න.

(17) (a) $\sin A, \sin B, \cos A$ සහ $\cos B$ ඇසුරෙන් $\cos(A+B)$ සර්වසාම්‍ය ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒනයින් $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ බව පෙන්වන්න.

සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා

$\cos 4x + 3\sin 2x - 2 = a\sin^2 2x + b\sin 2x + c$ වන පරිදි a, b සහ c නියත සොයන්න.

තවද $\cos 4x + 3\sin 2x = 2$ සමීකරණය විසඳන්න.

(b) සුපුරුදු අංකනයට අනුව ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා වූ සයින නීතිය සහ කෝසයින නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා වූ සුපුරුදු අංකනයට අනුව,

$\tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)\cot\frac{C}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$a = 5\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$ සහ $\cos(A-B) = \frac{31}{32}$ බව දී ඇත. $c = 6cm$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\cos^{-1}x - \sin^{-1}x = \frac{\pi}{6}$ සමීකරණය විසඳන්න.